Αριθμητική Ανάλυση

No. 1 Date 11/12/2019

Άσκηση: Να προσδιορισθεί πολυώνυμο το πολύ 3ου βαθμού στον παρακάτω πίνακα τιμών

x_i	-2	-1	1	2
f_i	-1	1	5	7

Χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε τύπο παρεμβολής. Αν $f \in C^4[-2,2]$ και $\max\limits_{-2\le x\le 2}|f^{(4)}(x)| = 2$, να βρεθεί ένα φράγμα για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα κατά την παρεμβολή στο διάστημα $[-2,2]$

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
-2	-1			
-1	1	2		
1	5	2	0	
2	7	2	0	0

$$P_3(x) = \Delta^0(-2)(1) + (x+2)\Delta^1(-2,-1) + (x+2)(x+1)\Delta^2(-2,-1,1) + (x+2)(x+1)(x-1)\Delta^3(-2,-1,1,2) =$$

$$= -1 + 2(x+2) = 2x+3$$

$$|f(x) - P_3(x)| \le \frac{1}{4!}\max_{-2\le \xi\le 2}|f^{(4)}(\xi)| \max_{-2\le x\le 2}|(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)|$$

$$\Phi(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-4)(x^2-1) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$\Phi'(x) = 4x^3 - 10x = 4x\left(x^2 - \frac{5}{2}\right) = 4x\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Ακρότατα της Φ: $x=0$, $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Phi(0) = 4$, $\Phi\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = -\frac{9}{4}$, $\left|-\frac{9}{4}\right| < |4|$

→ Το απόλυτο μέγιστο δίνεται στο $x=0$ και είναι 4.

$$|f(x) - P_3(x)| \le \frac{1}{4!}\cdot 2\cdot 4 = \frac{1}{3}$$

Άσκηση:

Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου 1 και δίνεται από:

x_i	0	1	2
f_i	1	-1	3

x_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
0	1			
1	-1	-2		
2	3	4	3	
4				1

$$f(x) = 1 - 2x + 3x(x-1) + 1x(x-1)(x-2) = 1 - 2x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3x + 1.$$

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x(x-1)(x-2) = P_2(x) + \frac{\xi}{\xi!}x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x + 1.$$

$$f^{(3)}(\xi) = \left(\xi^3 + q_2(\xi)\right)^{(3)} = \xi!$$

▶ **Αριθμητική Ολοκλήρωση:**

Έστω $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Αν F είναι η παράγουσα συνάρτησης

$F'(x) = f(x)$, τότε $I(f) = F(b) - F(a)$

Προσεγγίζουμε το $I(f)$ με την ποσότητα $Q_{n+1}(f)$

$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$, $w_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,\dots,n$

$x_i \in [a,b]$, $i = 0,1,2,\dots,n$

Τύποι Αριθμ. Ολοκλήρωσης των Newton-Cotes

Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$, $x_i = a + ih$, $i = 0,1,2,\dots,n$,

$h = \frac{b-a}{n}$

$Q_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$

Οι συντελεστές w_i υπολογίζονται ώστε

$Q_{n+1}(f) = I(P_n)$, όπου P_n το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα x_i.

$$Q_{n+1}(f) = I(P_n) = \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx =$$

$$= f(x_0)\int_a^b L_0(x)\,dx + f(x_1)\int_a^b L_1(x)\,dx + \dots + f(x_n)\int_a^b L_n(x)\,dx$$

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{a+sh-(a+jh)}{a+ih-(a+jh)}\,dx \quad \Big|\ x = a+sh,\ 0\le s\le n$$

$$= h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds = h\int_0^n \varphi_i(s)\,ds$$

- $w_{n-i} = w_i$

$$w_{n-i} = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-i}}^{n} \frac{s-j}{n-i-j}\,ds = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-i}}^{n} \frac{n-t-j}{n-i-j}\,d(n-t) =$$

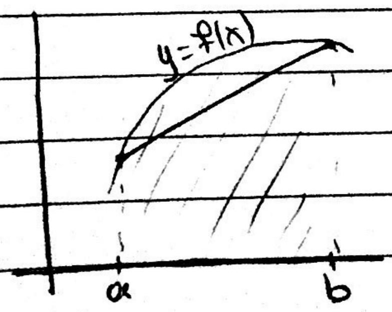
$$= -h\int_n^0 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-(n-j)}{i-(n-j)}\,dt = h\int_0^n \prod_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{n} \frac{t-l}{i-l}\,dt = w_i, \quad j\neq n-i \Leftarrow i\neq n-j = l$$

$n=1$

$$w_0 = h\int_0^1 \frac{s-1}{0-1}\,ds = h\int_0^1 (-s+1)\,ds = h\left[-\frac{s^2}{2}+s\right]_0^1 = h\cdot\frac{1}{2} = \frac{h}{2}$$

$$w_1 = \frac{h}{2}, \quad Q_2(f) = \frac{h}{2}f(x_0) + \frac{h}{2}f(x_1) = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

Τύπος ή Κανόνας του Τραπεζίου



$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$Q_2(f) = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$n=2$

$$w_0 = h\int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)(-2)}\,ds = h\int_0^2 \left(\frac{s^2}{2} - \frac{3}{2}s + 1\right)ds =$$

$$= h\left[\frac{s^3}{6} - \frac{3}{4}s^2 + s\right]_0^2 = h\left[\frac{4}{3} - 3 + 2\right] = \frac{h}{3}, \quad w_0 = \frac{h}{3}$$

$$w_1 = h\int_0^2 \frac{s(s-2)}{1(1-2)}\,ds = h\int_0^2 (-s^2+2s)\,ds = h\left[-\frac{s^2}{3} + s^2\right]_0^2 =$$

$$= h\left(-\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{4h}{3}$$

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

Τύπος ή Κανόνας του Simpson